Formelsammlung Theoretische Physik

Alexander Wagner, Claus Blöchinger

Kapitel 1

Physikalische Größen

1.1 Naturkonstanten

Name	Symbol	Wert
Plancksches Wirkungsquantum	h	$6,62618 \cdot 10^{-34} Js$
	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	$1,05459 \cdot 10^{-34} Js$
Vakuumlichtgeschwindigkeit	c	$2,99792 \cdot 10^{8} \frac{m}{s}$
Magnetische Feldkonstante	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m} = 1,25664 \cdot 10^{-6} \frac{H}{m}$
Elektrische Feldkonstante	ε_0	$8,85419 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$
Elementarladung	e	$1,60219 \cdot 10^{-19} C$
Feinstrukturkonstante	$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}$	$\frac{1}{137{,}036} = 7,29735 \cdot 10^{-3}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3}$	$5,6703 \cdot 10^{-}8 \frac{W}{m^2K^4}$
Wiensche Konstante	$b = \lambda_{max} T$	$2,897756 \cdot 10^{-3} mK$
Gravitationskonstante	G	$6,672 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg}$
Avogadro-Zahl	N_A	$6,02205 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol}$
Faraday-Konstante	$F = N_A e$	$9,64846 \cdot 10^{4} \frac{C}{mol}$
Boltzmann-Konstante	k_B	$1,38066 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$
Gaskonstante	$R = k_B N_A$	$8,31441 \frac{J}{molK}$
Atomare Masseneinheit	$1u = \frac{1}{12} M_{^{12}C}$	$1,66057 \cdot 10^{-27} kg$
Elektronenmasse	m_e	$9,10953 \cdot 10^{-31} kg = 5,48580 \cdot 10^{-4} u$
Protonenmasse	m_p	$1,67265 \cdot 10^{-27} kg = 1,007276 u$
Neutronenmasse	m_n	$1,67492 \cdot 10^{-27} kg = 1,008665 u$
	$\frac{m_p}{m_e}$	$1836,15$
	$\frac{\lvert e \rvert}{m_e}$	$1,75880 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg}$
Comptonwellenlänge des Elektrons	$\lambda_c = \frac{h}{mc}$	$2,42631 \cdot 10^{-12} m$
klassischer Elektronenradius	$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}$	$2,81794 \cdot 10^{-15} m$

Name	Symbol	Wert
Bohrradius	$a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}$	$5,29177 \cdot 10^{-11} m$
Ionisationsenergie H-Atoms	$I_P^H(\infty) = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0}$	$2,17991 \cdot 10^{-18} J$
		$= 13,6058 eV$
	$= \frac{\alpha^2 mc^2}{2}$	
Rydbergkonstante $(m = \infty)$	$R_\infty = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c}$	$1,09737 \cdot 10^7 \frac{1}{m}$
	$= \frac{\alpha}{4\pi a_0}$	
Rydbergkonstante (H-Atom)	R_H	$1,09678 \cdot 10^7 \frac{1}{m}$
Bohrsches Magneton	$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$	$9,27408 \cdot 10^{-24} \frac{J}{T}$
Kernmagneton	$\mu_K = \frac{e\hbar}{2m_p}$	$5,05082 \cdot 10^{-27} \frac{J}{T}$
Mag. Moment des e^-	M_e	$9,28483 \cdot 10^{-24} \frac{J}{T}$
		$= 1,00116 \mu_B$
Mag. Moment des p^+	M_p	$1,41062 \cdot 10^{-26} \frac{J}{T}$
		$= 2,79285 \mu_K$
Mag. Moment des n	M_n	$-0,96630 \cdot 10^{-26} \frac{J}{T}$
		$= -1,91315 \mu_K$
gyromagnetisches Verhältnis	γ_p	$2,67522128 \cdot 10^8 \frac{rad}{Ts}$
Quantenhallwiderstand	R_{Hall}	$25812,8056\Omega$
Mag. Flußquantum	$\Phi_0 = \frac{h}{2e}$	$2,06783461 \cdot 10^{-15} Wb$

Kapitel 2

Vektoranalysis, Feldtheorie

2.1 Allgemeine Beziehungen

Im folgenden einige grundlegende Gleichungen der Vektorrechnung und Beziehungen zwischen den Vektorprodukten[1]

$$\begin{aligned}&\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C}\equiv(\vec{A},\vec{B},\vec{C})=(\vec{B},\vec{C},\vec{A})=(\vec{C},\vec{A},\vec{B})=\\&-(\vec{A},\vec{C},\vec{B})=-(\vec{C},\vec{B},\vec{A})=-(\vec{B},\vec{A},\vec{C})\end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C} \tag{2.2}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})+\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A})+\vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B})=0 \tag{2.3}$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D})=\vec{A}\cdot(\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{D}))=(\vec{A}\cdot\vec{B})(\vec{B}\cdot\vec{D})-(\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{D}) \tag{2.4}$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D})=(\vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{D})\vec{C}-(\vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{D} \tag{2.5}$$

Der vollkommen antisymmetrische Tensor ε_{ijk} [2]

[1] s. a. Bronstein S. 149ff *Vektoralgebra und analytische Geometrie*
[2] s. a. Bronstein S. 234

$$
\begin{aligned}
(\vec{a} \times \vec{b})_i &= \varepsilon_{ijk} a_j b_k && (2.6)\\
\varepsilon_{ijk} &= \varepsilon_{kji} \qquad \varepsilon_{ijk} \text{ zyklisch} && (2.7)\\
\varepsilon_{ijk} &= -\varepsilon_{jik} \qquad \varepsilon_{ijk} \text{ antisymmetrisch} && (2.8)\\
\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm} &= \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} && (2.9)
\end{aligned}
$$

2.2 Definition von $grad, div, rot$ und Δ in verschiedenen Koordinatensystemen

Definition der Vektoroperatoren und deren Darstellung in den gebräuchlichsten Koordinatensystemen [3]

- Definition: Divergenz div

$$div\vec{A}(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{|\Delta V|} \oint_{\Delta F} d\vec{F} \cdot \vec{A} = \oint_{\Delta F} d\vec{F} \cdot \vec{A} \tag{2.10}$$

- Definition: Rotation rot

$$\frac{\Delta F}{|\Delta F|} \cdot rot\vec{A}(\vec{r}) = \lim_{\Delta F \to 0} \oint_{\Delta C} d\vec{r} \cdot \vec{A} = \oint_{\Delta C} d\vec{r} \cdot \vec{A} \tag{2.11}$$

$$grad\Phi = \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\vec{e_x} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\vec{e_x} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\vec{e_z} & \text{(Kartesische Koordinaten)} \\[2ex] \dfrac{\partial \Phi}{\partial \rho}\vec{e_\rho} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \Phi}{\partial \phi}\vec{e_\phi} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\vec{e_z} & \text{(Zylinderkoordinaten)} \\[2ex] \dfrac{\partial \Phi}{\partial r}\vec{e_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Phi}{\partial \theta}\vec{e_\phi} + \dfrac{1}{r\sin(\theta)}\dfrac{\partial \Phi}{\partial \theta}\vec{e_\theta} & \text{(Kugelkoordinaten)} \end{cases} \tag{2.12}$$

[3] s. a. Bronstein S. 523ff *Vektoranalysis und Feldtheorie* sowie insbesondere auch S. 539

$$
div\vec{A} = \begin{cases}
\dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z} \\[2ex]
\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z} \\[2ex]
\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r\sin(\theta)}\dfrac{\partial(\sin(\theta) A_\theta)}{\partial \theta} + \dfrac{1}{r\sin(\theta)}\dfrac{\partial A_\phi}{\partial \phi}
\end{cases} \tag{2.13}
$$

$$
rot\vec{A} = \begin{cases}
\left(\dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \\[2ex]
+\left(\dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e_z} \\[4ex]
\left(\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial A_z}{\partial \phi} - \dfrac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\vec{e_\rho} + \left(\dfrac{\partial A_\rho}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\vec{e_\phi} + \\[2ex]
+\left(\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \dfrac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right)\vec{e_z} \\[4ex]
\left(\dfrac{1}{r\sin(\theta)}\dfrac{\partial(\sin(\theta) A_\phi)}{\partial \theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right)\vec{e_r} + \\[2ex]
+\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{\sin(\theta)}\dfrac{\partial A_r}{\partial \phi} - \dfrac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \\[2ex]
+\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e_\phi}
\end{cases} \tag{2.14}
$$

$$\Delta\Phi = \begin{cases} \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \\ \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \\ \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2(r\Phi)}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2\sin(\theta)}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} \\ \end{cases} \tag{2.15}$$

2.3 Gradient, Divergenz, Rotation, Nabla (∇)

$$grad(\phi\psi) \equiv \nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi \tag{2.16}$$

$$div(\phi\vec{A}) \equiv \nabla\cdot(\phi\vec{A}) = \vec{A}\cdot\nabla\phi + \phi\nabla\cdot\vec{A} \tag{2.17}$$

$$rot(\phi\vec{A}) \equiv \nabla\times(\phi\vec{A}) = \phi\nabla\times\vec{A} - \vec{A}\times\nabla\phi \tag{2.18}$$

$$div(\vec{A}\times\vec{B}) \equiv \nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B}) \tag{2.19}$$

$$rot(\vec{A}\times\vec{B}) \equiv \nabla\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}(\nabla\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\nabla\cdot\vec{A}) + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} \tag{2.20}$$

$$grad(\vec{A}\cdot\vec{B}) \equiv \nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A}) + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} + (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} \tag{2.21}$$

$$\nabla^2\phi = \nabla\cdot\nabla\phi = \Delta\phi \tag{2.22}$$

$$\nabla^2\vec{A} = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla\times(\nabla\times\vec{A}) \tag{2.23}$$

$$\nabla\times\nabla\phi = 0 \tag{2.24}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}) = 0 \tag{2.25}$$

2.4 Verschiedene Beziehungen des Ortsvektors

Sei $\vec{r}$ ein Ortsvektor der Länge r vom Ursprung zu (x, y, z) und sei $\vec{J}$ ein beliebiger konstanter Vektor. Dann gilt

$$\nabla \cdot \vec{r} = 3 \tag{2.26}$$

$$\nabla \times \vec{r} = 0 \tag{2.27}$$

$$\nabla r = \frac{\vec{r}}{|r|} \tag{2.28}$$

$$\nabla \frac{1}{|r|} = \frac{-\vec{r}}{|r|} \tag{2.29}$$

$$\nabla \cdot \frac{\vec{r}}{|r|^3} = -\nabla^2 \frac{1}{|r|} = 0 \quad \text{wenn } r \neq 0 \tag{2.30}$$

$$\nabla \cdot \frac{\vec{J}}{r} = \vec{J} \cdot (\nabla \frac{1}{r}) = -\frac{(\vec{J} \cot \vec{r})}{|r|^3} \tag{2.31}$$

$$\nabla^2 \frac{\vec{J}}{|r|} = \vec{J} \nabla^2 \frac{1}{|r|} = 0 \quad \text{wenn } r \neq 0 \tag{2.32}$$

$$\nabla \times (\vec{J} \times \vec{B}) = \vec{J}(\nabla \cdot B) + \vec{J} \times (\nabla \times \vec{B}) - \nabla(\vec{J} \cdot \vec{B}) \tag{2.33}$$

2.5 Integralsätze

Sei V ein durch die geschlossene Oberfläche S begrenztes Volumen. dS sei positiv, wenn es vom Volumen nach außen zeigt (Normalenvektor). [4] Dann gilt:

[4] Zu den Integralsätzen s. a. BRONSTEIN S. 545ff *Integralsätze*

Satz von Gauß

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{A}) dV = \int_V div\vec{V} dV \tag{2.34}$$

In 4 Dimensionen:

$$\int_{\partial B} d\sigma_\lambda A^\lambda = \int_B dx \partial^\lambda A_\lambda \tag{2.35}$$

Als Folgerungen aus dem Satz von Gauß ergegen sich die Integralsätze von Green

1. Greenscher Satz

$$\int_V (U_1 \Delta U_2 + gradU_2 gradU_1) dv = \oint_S U_1 gradU_2 \cdot d\vec{S} \tag{2.36}$$

2. Greenscher Satz

$$\int_V (U_1 \Delta U_2 - U_2 \Delta U_1) dv = \oint_S (U_1 gradU_2 - U_2 gradU_1) \cdot d\vec{S} \tag{2.37}$$

Speziell für $U_1 = 1$ wird der 2. Greensche Satz zu

3. Greenscher Satz

$$\int_V \Delta U dv = \oint_S gradU \cdot d\vec{S} \tag{2.38}$$

$$\oint_S \phi dS = \int_V (\nabla \phi) dV \tag{2.39}$$

$$\oint_S dS \times \vec{A} = \int_V (\nabla \times \vec{A}) dV \tag{2.40}$$

Sei nun S eine offene Fläche die durch die C begrenzt wird, dessen Linienelement ds sei. Es gilt:

Satz von Stokes

$$\oint_C \vec{A} \cdot ds = \int_S (\nabla \times \vec{A}) dS \tag{2.41}$$

$$\oint_C \phi ds = \int_S dS \times \nabla \phi \tag{2.42}$$

Kapitel 3

Die Dirac'sche δ-Funktion

Die δ-Funktion ist erklärt durch:

$$(\delta(x - x_0), \varphi(x)) = \varphi(x_0) \tag{3.1}$$

also

$$\int dx \delta(x - x_0)\varphi(x) = \varphi(x_0) \tag{3.2}$$

3.1 Limesdarstellungen

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \tag{3.3}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \exp\left(\frac{-x^2}{4\varepsilon}\right) = \tag{3.4}$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{\nu \to \infty} \frac{\sin(\nu x)}{x} = \frac{1}{\pi} \lim_{\nu \to \infty} \frac{\sin^2(\nu x)}{\nu x^2} \tag{3.5}$$

3.2 Die δ-Funktion als Ableitung

Stufenfunktionen:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

Verschiedene Darstellungen der δ-Funktion:

$$\varepsilon(x) = \Theta(x) - \Theta(-x) = \frac{d}{dx}|x| \tag{3.8}$$

$$\Theta(x) = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon(x)) \tag{3.9}$$

$$\delta(x) \quad = \quad \frac{d}{dx}\Theta(x) \quad = \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\varepsilon(x) \quad = \quad \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}|x| \tag{3.10}$$

3.3 Formeln mit δ

$$\begin{aligned}
&\delta(x) \quad = \quad \delta(-x) \quad = \quad |a|\delta(ax)\varphi(x)\delta(x-a) \quad = \\
&\varphi(a)\delta(x-a)\varphi(x \pm x)\delta(x) \quad = \\
&\varphi(a)\delta(x)x\delta(x) \quad = \\
&x^2\delta(x) \quad = \cdots \quad = \quad 0
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\delta(\psi(x)) = \sum_N \frac{\delta(x - x_N)}{|\psi'(x_N)|} \tag{3.12}$$

Wenn ψ nur einfache Nullstellen x_N hat.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\varphi(x)\frac{d^n}{dx^n}\delta(x-y) = (-1)^n\frac{d^n}{dy^n\varphi(y)} \tag{3.13}$$

Skalierung:

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \tag{3.14}$$

3.4 Dreidimensionale δ-Funktion

$$\begin{aligned}
&\delta(\vec{x} - \vec{x'}) = \delta(x_1 - x_1')\delta(x_2 - x_2')\delta(x_3 - x_3') = \\
&\frac{1}{r^2}\delta(r - r')\delta(\cos(\theta) - \cos(\theta'))\delta(\varphi - \varphi') = \\
&-\frac{1}{4\pi}\Delta\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x'}|}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \tag{3.16}$$

bzw. in Kugelkoordinaten

$$\vec{x} = (r\cos(\varphi)\sin(\theta), r\sin(\varphi)\sin(\theta), r\cos(\theta)) \tag{3.17}$$

3.5 Logarithmus, Hauptwert, $\delta_\pm$

Für den komplexen Logarithmus ist

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \ln(x \pm i\varepsilon) = \ln|x| \pm i\pi\Theta(x) \tag{3.18}$$

Durch diffenenzieren folgt:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} = P\frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x) =: \mp 2\pi i\delta_\pm(x) \tag{3.19}$$

Dabei bedeutet P den Cauchy'schen Hauptwert:

$$(P\frac{1}{x}, \varphi(x)) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{\varphi(x)}{x}dx \tag{3.20}$$

$$\delta_\pm(-x) = \delta_\mp(x) \tag{3.21}$$

$$x\delta_\pm(x) = \mp\frac{1}{2\pi i} \tag{3.22}$$

$$\delta_+(x) + \delta_-(x) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0}(\frac{1}{x - i\varepsilon} - \frac{1}{x + i\varepsilon}) = \delta(x) \tag{3.23}$$

$$\delta_+(x) - \delta_-(x) = -\frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0}(\frac{1}{x - i\varepsilon} + \frac{1}{x + i\varepsilon}) = \frac{i}{\pi}P\frac{1}{x} \tag{3.24}$$

$$P\frac{1}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} \tag{3.25}$$

3.6 Fourierintegrale

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}dk \tag{3.26}$$

$$\delta_{\pm}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\Theta(\pm k)dk \tag{3.27}$$

$$P\frac{1}{x} = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\varepsilon(k)dk \tag{3.28}$$

$$\Theta(\pm x) = \pm\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{k \mp i\varepsilon},\ \text{wobei}\ \varepsilon(x) = \frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}P\frac{1}{k}dk \tag{3.29}$$

$$\delta'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} ike^{ikx}dk\ \text{etc.} \tag{3.30}$$

$$\delta(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}\vec{x}}d^3k \tag{3.31}$$

$$\delta(r-a) = \frac{a}{2\pi^2}\int e^{i\vec{k}\vec{x}}\frac{\sin(ak)}{k}d^3k\ \text{mit}\ k = \sqrt{\vec{k}^2} \tag{3.32}$$

Kapitel 4

Orthogonale Funktionensysteme

Für orthogonale Funktionen gilt allgemein:

$$\int_a^b = \overline{f_n(x)} f_m(x) w(x) dx = \frac{1}{N_n^2} \delta_{mn} \tag{4.1}$$

$$\sum_n N_n^2 f_n(x) \overline{f_n(y)} = \frac{1}{w(x)} \delta(x-y) \tag{4.2}$$

4.1 Trigonometrische Funktionen

$$f_n = e^{inx} \text{ mit } -\infty \leq n \leq +\infty \tag{4.3}$$

$$N_n^2 = \frac{1}{2\pi}, a = 0, b = 2\pi, w(x) = 1 \tag{4.4}$$

4.2 Hermite'sche Polynome

Energieeigenfunktionen des harmonischen Oszillators in der Quantenmechanik[1]

$$f_n = H_n(x) \text{ mit } 0 \leq n \leq \infty \tag{4.5}$$

[1] s. a. Bronstein S. 402 und 435 bzw. unter *Harmonischer Oszillator* S. 433ff

$$N_n^2 = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \quad a = -\infty, \quad b = +\infty \quad w(x) = e^{-x^2} \tag{4.6}$$

$$H_0(x) = 1 \quad H_1(x) = 2x \quad H_2(x) = 4x^2 - 2 \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x \tag{4.7}$$

allgemein:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \tag{4.8}$$

$$H_{2n+1}(0) = 0 \quad H_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n)!}{n!} \tag{4.9}$$

Rekursionsformel zur Berechnung:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \tag{4.10}$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} + 2n \right) H_n(x) = 0 \tag{4.11}$$

4.3 Laguerre'sche Funktionen

Partikuläre Lösungen der Laguerre'schen Differentialgleichung, einer speziellen hypergeometrischen Differentialgleichung. [2]

$$f_n(x) = L_n^{(k)}(x) \text{ mit } 0 \leq n \leq \infty \tag{4.12}$$

$$N_n^2 = \frac{n!}{\Gamma(n+k+1)}, \quad a = 0, \quad b = \infty, \quad w(x) = x^k e^{-x} \tag{4.13}$$

k rell, für ganze k ergeben sich die Laguerre-Polynome

$$L_0(x) = 1 \quad L_1^{(k)}(x) = k + 1 - x \tag{4.14}$$

[2] s. a. Bronstein S. 402

$$L_2^{(k)}(x) = \frac{1}{2}\left[(k+1)(k+2) - 2(k+2)x + x^2\right] \tag{4.15}$$

$$L_n^{(k)} = \frac{1}{n!}x^{-k}e^x\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+k}) = \sum_{\nu=0}^{n}\begin{pmatrix} n+k \\ n-\nu \end{pmatrix}\frac{(-x)^\nu}{\nu!} \tag{4.16}$$

$$L_k^{-k}(x) = (-1)^k\frac{x^k}{k!} \quad L_n^{(k)}(0) = \begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

$$\left(x\frac{d^2}{dx^2} + (k+1-x)\frac{d}{dx} + n\right) \; L_n^{(k)}(x) = 0 \tag{4.18}$$

$$L_n^{(k)\prime}(x) = -L_{n-1}^{(k+1)}(x) = L_n^{(k)}(x) - L_n^{(k+1)}(x) = \\ \frac{1}{x}(nL_n^{(k)}(x) - (n+k)L_{n-1}^{(k)}(x)) \tag{4.19}$$

Fortsetzung für k nicht ganz:

$$L_n^{(k)}(z) = \begin{pmatrix} n+k \\ n \end{pmatrix} \; {}_1F_1(-n; k+1; z) \tag{4.20}$$

(${}_1F_1$ ist die konfluente hypergeometrische Funktion)

4.4 Sphärische Besselfunktionen

Stellen die partikulären Lösungen der Besselschen Differentialgleichung dar. [3]

$$j_l(x) \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{l+\frac{1}{2}}(x) \;=\; x^l\left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^l\frac{\sin(x)}{x} \tag{4.21}$$

$$j_0(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad j_1(x) = \frac{\sin(x)}{x^2} - \frac{\cos(x)}{x}\cdots \tag{4.22}$$

$$\left\{x^2\frac{d^2}{dx^2} + 2x\frac{d}{dx} + \left[x^2 - l(l+1)\right]\right\} \; j_l(x) = 0 \tag{4.23}$$

[3] s.a. Bronstein S. 398ff

$$j_l'(x) = j_{l-1}(x) - \frac{l+1}{x} j_l(x) \tag{4.24}$$

$$\int_0^\infty y^2 j_l(yx) j_l(yx')dy = \frac{\pi}{2x^2}\delta(x-x') \tag{4.25}$$

4.5 Legendre'sche Polynome

Eigenfunktionen des Drehimpulsoperators $\vec{L}^2$ und $\vec{L_z}$ in der Quantenmechanik [4]

$$f_n(x) = P_n(x) \text{ mit } 0 \leq n \leq \infty, N_n^2 = n+\frac{1}{2}, a = -1 b = 1, w(x) = 1 \tag{4.26}$$

$$P_0(x) = 1 \quad P_1(x) = x \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1) \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x) \tag{4.27}$$

allgemein:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \tag{4.28}$$

$$P_{2n+1}(0) = 0 \quad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \quad P_n(\pm 1) = (\pm 1)^n \tag{4.29}$$

Rekursionsformel:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \tag{4.30}$$

$$((1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} + n(n+1))P_n(x) = 0 \tag{4.31}$$

$$(1-x^2)P_n'(x) = n(P_{n-1}(x) - xP_n(x)) = \frac{n(n+1)}{2n+1}(P_{n-1}(x) - P_{n+1}(x)) \tag{4.32}$$

$$P_l(\cos(\theta)) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} \overline{Y_l^m(\theta_1,\phi_1)} Y_l^m(\theta_2,\phi_2) \tag{4.33}$$

$$\frac{1}{|\vec{r_1}-\vec{r_2}|} = \frac{1}{\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(\gamma)}} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos(\gamma)) \tag{4.34}$$

[4] s. a. BRONSTEIN Eigenschaften S. 400f, bzw. S. 458 (Tabelle)

4.6 Kugelflächenfunktionen (Spherical harmonics)

Diese bilden ein vollständiges Orthogonalsystem in zwei Dimensionen. Kugelflächenfunktionen bilden die Eigenfunktionen der Drehimpulsoperatoren $\vec{L}^2$ und L_z. [5]

Für eine Liste der Kugelflächenfunktionen siehe unter [**??**]

$$\int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} d(cos(\theta) \tag{4.35}$$

$$\int d\Omega \overline{Y_l^m(\theta,\varphi)} Y_{l'}^{m'}(\theta',\varphi') = \delta_{l,l'}\delta_{m,m'} \tag{4.36}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y_l^m(\theta,\varphi)\overline{Y_l^m(\theta',\varphi')} = \delta(\varphi-\varphi')\delta(\cos(\theta) - cos(\theta')) \tag{4.37}$$

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} e^{im\varphi} P_l^m cos(\theta) \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned} P_l^m(cos(\theta)) &= \varepsilon_m sin^{|m|}(\theta)\left(\frac{d}{d(\cos(\theta)}\right)^m P_l(\cos(\theta)) \\ \text{mit } \varepsilon_m &= \begin{cases} (-1)^m & x \le 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{4.39}$$

$$Y_l^{-m}(\theta,\varphi) = (-1)^m \overline{Y_l^m(\theta,\varphi)} \tag{4.40}$$

$$Y_l^0(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos(\theta)) \tag{4.41}$$

[5] s. a. Legendre-Polynome sowie deren zugeordnete Funktionen (Bronstein S. 400f, 458) , und Bronstein S. 430ff, und 433

$$Y_l^m(0,\varphi) = \\ \delta_{m,0}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\cot(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+l(l+1)\right)\ Y_l^m(\theta,\varphi) \\ = \ 0 \tag{4.42}$$

$$\cos(\theta)Y_l^m = \sqrt{\frac{(l+m)(l-m)}{(2l-1)(2l+1)}}\ Y_{l-1}^m+\sqrt{\frac{(l+m+1)(l-m+1)}{(2l-1)(2l+3)}}\ Y_{l+1}^m \tag{4.43}$$

$$-\sin(\theta)e^{\pm i\varphi}Y_l^m = \\ \mp\sqrt{\frac{(l\mp m)(l\mp m-1)}{(2l-1)(2l+1)}}Y_{l-1}^{m\pm1}\pm\sqrt{\frac{(l\pm m+2)(l\pm m+1)}{(2l+1)(2l+3)}}Y_{l+1}^{m\pm1} \tag{4.44}$$

4.7 Fouriereihen

$$\int_a^b \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)dx = \frac{a}{2}\delta_{nm} \tag{4.45}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos(nx) = -\frac{1}{2}+\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(x-2\pi n) \tag{4.46}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(nx) = -\pi\sum_{n=-\infty}^{-\infty}\delta'(x-2\pi n) \tag{4.47}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{inx} = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(x-2\pi n) \tag{4.48}$$

$$\int Y_l^m d\Omega = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}4\pi\delta_{l0}\delta_{m0} \tag{4.49}$$

Kapitel 5

Operatoralgebra

$$
\begin{aligned}
[A,B] &= AB - BA && (5.1)\\
\{A,B\} &= AB + BA && (5.2)\\
[A,B]^\dagger &= \left[B^\dagger, A^\dagger\right] && (5.3)\\
[A,B] &= -\,[B,A] && (5.4)\\
[AB,C] &= A[B,C] + [A,C]B && (5.5)\\
[A,BC] &= B[A,C] + [A,B]C && (5.6)\\
[[A,B]\,,C] &= \{A,\{B,C\}\} - \{B,\{A,C\}\} && (5.7)\\
[AB,CD] &= AC[B,D] + A[B,C]D + C[A,D]B + [AC]DB && (5.8)\\
[AB,CD] &= A\{A,C\}D - AC\{B,D\} - C\{A,D\}B + \{C,A\}DB && (5.9)\\
e^{At} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} && (5.10)\\
e^A e^B &= e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]} && (5.11)\\
& && (5.12)
\end{aligned}
$$

Jacobi-Identität:

$$
[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0 \qquad (5.13)
$$

Kapitel 6

Quantenmechanik

6.1 Normierte Radialwellenfunktionen $R_{n,l}(r)$

n	l	Schale	Orbital	Funktion
1	0	K	s	$R_{10}(r) = 2 \cdot \left(\frac{Z}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{Zr}{a}\right)$
2	0	L	s	$R_{20}(r) = 2 \cdot \left(\frac{Z}{2a}\right)^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{Zr}{2a}\right) \exp\left(-\frac{Zr}{2a}\right)$
2	1	L	p	$R_{21}(r) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{Z}{2a}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{Zr}{a}\right) \exp\left(-\frac{Zr}{2a}\right)$
3	0	M	s	$R_{30}(r) = 2 \cdot \left(\frac{Z}{3a}\right)^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{2Zr}{3a} + \frac{2(Zr)^2}{27a^2}\right) \exp\left(-\frac{Zr}{3a}\right)$
3	1	M	p	$R_{31}(r) = \frac{4\sqrt{2}}{3} \left(\frac{Z}{3a}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{Zr}{a} \left(1 - \frac{Zr}{6a}\right) \exp\left(-\frac{Zr}{3a}\right)$

6.2 Winkelanteil der Wellenfunktionen (= Kugelflächenfunktionen)

l	m	Funktion
0	0	$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$
1	+1	$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\theta) e^{i\varphi}$
1	0	$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\theta)$
1	-1	$Y_1^{-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\theta) e^{-i\varphi}$
2	+2	$Y_2^2 = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2(\theta) e^{2i\varphi}$
2	+1	$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos(\theta) \sin(\theta) e^{i\varphi}$
2	0	$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} [3\cos^2(\theta) - 1]$
2	-1	$Y_2^{-1} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos(\theta) \sin(\theta) e^{-i\varphi}$
2	-2	$Y_2^{-2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2(\theta) e^{-2i\varphi}$
3	+3	$Y_3^3 = -\sqrt{\frac{35}{64\pi}} \sin^3(\theta) e^{3i\phi}$
3	+2	$Y_3^2 = \sqrt{\frac{105}{32\pi}} \sin^2(\theta) e^{2i\phi}$
3	+1	$Y_3^1 = -\sqrt{\frac{21}{64\pi}} \sin(\theta)(5\cos^2(\theta) - 1) e^{i\phi}$
3	0	$Y_3^0 = \sqrt{\frac{7}{16\pi}} (5\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta))$
3	-1	$Y_3^{-1} = \sqrt{\frac{21}{64\pi}} \sin(\theta)(5\cos^2(\theta) - 1) e^{-i\phi}$
3	-2	$Y_3^{-2} = \sqrt{\frac{105}{32\pi}} \sin^2(\theta) e^{-2i\phi}$
3	-3	$Y_3^{-3} = +\sqrt{\frac{35}{64\pi}} \sin^3(\theta) e^{-3i\phi}$

6.3 Normierte Eigenfunktionen $\psi_{n,l,m}(r,\theta,\phi)$

$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \exp(-\frac{Zr}{a_0})$	$= R_{10} \cdot Y_0^0$
$\psi_{200} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left(2 - \frac{Zr}{a_0}\right) \exp(-\frac{Zr}{2a_0})$	$= R_{20} \cdot Y_0^0$
$\psi_{210} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{Zr}{a_0}\right) \exp(-\frac{Zr}{2a_0}) \cos(\theta)$	$= R_{21} \cdot Y_1^0$
$\psi_{21\pm1} = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{Zr}{a_0}\right) \exp(-\frac{Zr}{2a_0}) \sin(\theta) e^{(\pm i\phi)}$	$= R_{21} \cdot Y_1^{\pm1}$
$\psi_{300} = \frac{1}{81\sqrt{3\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left(27 - 18\frac{Zr}{a_0} + 2\left(\frac{Zr}{a_0}\right)^2\right) \exp(-\frac{Zr}{3a_0})$	$= R_{30} \cdot Y_0^0$
$\psi_{310} = \frac{\sqrt{2}}{81\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left(6 - \frac{Zr}{a_0}\right) \frac{Zr}{a_0} \exp(-\frac{Zr}{3a_0}) \cos(\theta)$	$= R_{31} \cdot Y_1^0$
$\psi_{31\pm1} = \frac{1}{81\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left(6 - \frac{Zr}{a_0}\right) \frac{Zr}{a_0} \exp(-\frac{Zr}{3a_0}) \sin(\theta) e^{\pm i\phi}$	$= R_{31} \cdot Y_1^{\pm1}$
$\psi_{320} = \frac{1}{81\sqrt{6\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{Zr}{a_0}\right)^2 \exp(-\frac{Zr}{3a_0})(3\cos^2(\theta) - 1)$	$= R_{32} \cdot Y_2^0$
$\psi_{32\pm1} = \frac{1}{81\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{Zr}{a_0}\right)^2 \exp(-\frac{Zr}{3a_0}) \sin(\theta)\cos(\theta) - 1)e^{\pm i\phi}$	$= R_{32} \cdot Y_2^{\pm1}$
$\psi_{32\pm2} = \frac{1}{81\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{Zr}{a_0}\right)^2 \exp(-\frac{Zr}{3a_0}) \sin^2(\theta) e^{\pm 2i\phi}$	$= R_{32} \cdot Y_2^{\pm2}$

Kapitel 7

Verteilungsfunktionen

Im folgenden die in der Physik wichtigsten Verteilungfunktionen.

Maxwell-Boltzmann-Verteilung

$$f(\vec{v}) = n \left(\frac{m}{2\pi k_B t} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(-\frac{mv^2}{2k_B T} \right)$$

Fermi-Dirac-Verteilung

$$f_F(\vec{v}) = \frac{1}{4} \left(\frac{m}{\hbar\pi} \right)^3 \frac{1}{\exp\left(\frac{\frac{1}{2}v^2 - k_B T_0}{k_B T} \right) + 1}$$

Bose-Einstein-Verteilung

$$f_B(\vec{v}) = \frac{1}{4} \left(\frac{m}{\hbar\pi} \right)^3 \frac{1}{\exp\left(\frac{\frac{1}{2}v^2 - k_B T_0}{k_B T} \right) - 1}$$

Kapitel 8

Elektrodynamik

8.1 SI und cgs

SI (MKSA)	Gauß'sche Einheiten (cgs)
$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho \vec{r}}{r^3} dV$ $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$	$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$ $\vec{E} = \int_V \frac{\rho \vec{r}}{r^3} dV$ $c\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$
$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(j + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right)$ $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\left(j + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}\right) \times \vec{r}}{r^3} dV$ $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$	$\nabla \times \vec{B} = 4\pi j + \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}$ $\vec{B} = \int \frac{\left(j + \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial E}{\partial t}\right) \times \vec{r}}{r^3} dV$ $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$
$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$	$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$
$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$	$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t}$
$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$ $\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^i} = \frac{j^j}{\epsilon_0}$ wobei $F^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -cB_z & cB_y & +E_x \\ cB_x & 0 & -cB_z & +E_y \\ -cb_y & cB_x & 0 & +E_z \\ -E_x & -E_y & -E_z & 0 \end{pmatrix}$	$\vec{F} = e(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{u} \times \vec{B})$ $\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^i} = 4\pi j^j$ wobei $F^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -B_z & B_y & +E_x \\ B_x & 0 & -B_z & +E_y \\ -b_y & B_x & 0 & +E_z \\ -E_x & -E_y & -E_z & 0 \end{pmatrix}$

8.2 Relativitätstheorie

Kontravarianter 4-Vektor:

$$A^\alpha = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (A^0, \vec{A}) \tag{8.1}$$

Kovarianter 4-Vektor

$$A_\alpha = (A_0, A_1, A_2, A_3) = (A_0, \vec{A}) \tag{8.2}$$

8.2.1 Transformationseigenschaften

Kontravarianter 4-Vektor

$$A'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^0} A^0 + \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^1} A^1 + \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^2} A^2 + \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^3} A^3 \tag{8.3}$$

Kovarianter 4-Vektor

$$A'_\alpha = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha} A_\beta = \frac{\partial x^0}{\partial x'^\alpha} A^0 + \frac{\partial x^1}{\partial x'^\alpha} A^1 + \frac{\partial x^2}{\partial x'^\alpha} A^2 + \frac{\partial x^3}{\partial x'^\alpha} A^3 \tag{8.4}$$

Kontravarianter Tensor

$$F'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\delta} F^{\gamma\delta} \tag{8.5}$$

Kovarianter Tensor

$$F'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\beta} F_{\gamma\delta} \tag{8.6}$$

Gemischter Tensor

$$F'^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\beta} F^{\gamma\cdot}_{\cdot\delta} \tag{8.7}$$

8.2.2 Vektorraumeigenschaften

Linienelement

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \tag{8.8}$$

Mit dem *metrischen Tensor* $g_{\alpha\beta}$

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{8.9}$$

Es gilt:

$$g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} \tag{8.10}$$

$$g_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = \delta_{\alpha.}^{.\beta} \tag{8.11}$$

$$x_\alpha = g_{\alpha\beta} x^\beta \tag{8.12}$$

$$x^\alpha = g_{\alpha\beta} x_\beta \tag{8.13}$$

$$A^\alpha = (A^0, A^1, A^2, A^3) \Rightarrow A_\alpha = (A_0, -A_1, -A_2, -A_3) \tag{8.14}$$

$$\tag{8.15}$$

Skalarprodukt

$$A \cdot B = B_\alpha A^\alpha = B^0 A^0 - \vec{A} \cdot \vec{B} \tag{8.16}$$

Kapitel 9

Trigonometrie

9.1 Trigonometrische Funktionen

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \qquad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \tag{9.1}$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha) \qquad \cot(-\alpha) = -\cot(\alpha) \tag{9.2}$$
$$\tag{9.3}$$

9.1.1 Funktionen eines Winkels

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \qquad \sin(\alpha)\csc(\alpha) = 1 \tag{9.4}$$
$$\sec^2(\alpha) - \tan^2(\alpha) = 1 \qquad \cos(\alpha)\sec(\alpha) = 1 \tag{9.5}$$
$$\csc^2(\alpha) - \cot^2(\alpha) = 1 \qquad \tan(\alpha)\cot(\alpha) = 1 \tag{9.6}$$
$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha) \qquad \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \cot(\alpha) \tag{9.7}$$

9.1.2 Beziehungen zweier Funktionen des selben Winkels

α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$	$\cot(\alpha)$
$\sin(\alpha)$	-	$\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}$	$\frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2(\alpha)}}$
$\cos(\alpha)$	$\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}$	-	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$	$\frac{\cot(\alpha)}{\sqrt{1+\cot^2(\alpha)}}$
$\tan(\alpha)$	$\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}}{\cos(\alpha)}$	-	$\frac{1}{\cot(\alpha)}$
$\cot(\alpha)$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}}{\sin(\alpha)}$	$\frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}}$	$\frac{1}{\tan(\alpha)}$	-

9.1.3 Summe und Differenz zweier Winkel

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta) && (9.8)\\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta) && (9.9)\\
\tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)} && (9.10)\\
\cot(\alpha \pm \beta) &= \frac{\cos(\alpha)\cot(\beta) \mp 1}{\cot(\beta) \pm \cot(\alpha)} && (9.11)\\
\sin(\alpha + \beta + \gamma) &= \sin(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma) + \cos(\alpha)\sin(\beta)\cos(\gamma) \\
&\quad + \cos(\alpha)\cos(\beta)\sin(\gamma) - \sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma) && (9.12)\\
\cos(\alpha + \beta + \gamma) &= \cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma) - \sin(\alpha)\sin(\beta)\cos(\gamma) \\
&\quad - \sin(\alpha)\cos(\beta)\sin(\gamma) - \cos(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma) && (9.13)
\end{aligned}
$$

9.1.4 Winkelvielfache

$$
\begin{aligned}
\sin(2\alpha) &= 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) && (9.14)\\
\sin(3\alpha) &= 3\sin(\alpha) - 4\sin^3(\alpha) && (9.15)\\
\sin(4\alpha) &= 8\cos^3(\alpha)\sin(\alpha) - 4\cos(\alpha)\sin(\alpha) && (9.16)\\
\cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) && (9.17)\\
\cos(3\alpha) &= 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha) && (9.18)\\
\cos(4\alpha) &= 8\cos^4(\alpha) - 8\cos^2(\alpha) + 1 && (9.19)\\
\tan(2\alpha) &= \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)} && (9.20)\\
\tan(3\alpha) &= \frac{3\tan(\alpha) - \tan^3(\alpha)}{1 - 3\tan^2(\alpha)} && (9.21)\\
\tan(4\alpha) &= \frac{4\tan(\alpha) - 4\tan^3(\alpha)}{1 - 6\tan^2(\alpha) + \tan^4(\alpha)} && (9.22)\\
\cot(3\alpha) &= \frac{\cot^3(\alpha) - 3\cot(\alpha)}{3\cot(\alpha) - 1} && (9.23)\\
\cot(2\alpha) &= \frac{\cot^2(\alpha) - 1}{2\cot(\alpha)} && (9.24)\\
\cot(4\alpha) &= \frac{\cot^4(\alpha) - 6\cot^2(\alpha) + 1}{4\cot^3(\alpha) - 4\cot(\alpha)} && (9.25)
\end{aligned}
$$

9.1.5 Funktionen des halben Winkels

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos(\alpha))} \tag{9.26}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos(\alpha))} \tag{9.27}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}} = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)} \tag{9.28}$$

$$\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{1-\cos(\alpha)}} = \frac{1+\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1-\cos(\alpha)} \tag{9.29}$$

9.1.6 Additionstheoreme

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{9.30}$$

$$\sin(\alpha)-\sin(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{9.31}$$

$$\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{9.32}$$

$$\cos(\alpha)-\cos(\beta) = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{9.33}$$

$$\tan(\alpha)\pm\tan(\beta) = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)} \tag{9.34}$$

$$\cot(\alpha)\pm\cos(\beta) = \pm\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin(\alpha)\sin(\beta)} \tag{9.35}$$

$$\tan(\alpha)+\cot(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha)\sin(\beta)} \tag{9.36}$$

$$\cot(\alpha)-\tan(\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha)\cos(\beta)} \tag{9.37}$$

9.1.7 Produkte

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha)\sin(\beta) &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right] && (9.38)\\
\cos(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right] && (9.39)\\
\sin(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right] && (9.40)\\
\sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma) &= \frac{1}{4}\Big[\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(\alpha+\gamma-\beta)\\
&\quad +\sin(\beta+\gamma-\alpha)-\sin(\alpha+\beta+\gamma)\Big] && (9.41)\\
\sin(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma) &= \frac{1}{4}\Big[\sin(\alpha+\beta-\gamma)-\sin(\beta+\gamma-\alpha)\\
&\quad +\sin(\gamma+\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta+\gamma)\Big] && (9.42)\\
\sin(\alpha)\sin(\beta)\cos(\gamma) &= \frac{1}{4}\Big[-\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)\\
&\quad +\cos(\gamma+\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta+\gamma)\Big] && (9.43)\\
\cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma) &= \frac{1}{4}\Big[\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\alpha+\gamma-\alpha)\\
&\quad +\cos(\gamma+\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta+\gamma)\Big] && (9.44)
\end{aligned}$$

9.1.8 Potenzen

$$\begin{aligned}
\sin^2(\alpha) &= \frac{1}{2}(1-\cos(2\alpha)) && (9.45)\\
\sin^3(\alpha) &= \frac{1}{4}(3\sin(\alpha)-\sin(3\alpha)) && (9.46)\\
\sin^4(\alpha) &= \frac{1}{8}(\cos(4\alpha)-4\cos(2\alpha)+3) && (9.47)\\
\cos^2(\alpha) &= \frac{1}{2}(1+\cos(2\alpha)) && (9.48)\\
\cos^3(\alpha) &= \frac{1}{4}(\cos(3\alpha)+3\cos(\alpha)) && (9.49)\\
\cos^4(\alpha) &= \frac{1}{8}(\cos(4\alpha)+4\cos(2\alpha)+3) && (9.50)\\
& && (9.51)
\end{aligned}$$

9.2 Hyperbolische Funktionen

9.2.1 Definition

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{9.52}$$

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \coth(x) = \frac{1}{\tanh(x)} \tag{9.53}$$

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} \qquad \operatorname{cosech}(x) = \frac{1}{\sinh(x)} \tag{9.54}$$

9.2.2 Hyperbelfunktionen einer Variablen

$$\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = 1 \qquad \coth^2(x) - \operatorname{cosech}^2(x) = 1 \tag{9.55}$$

$$\operatorname{sech}^2(x) + \tanh^2(x) = 1 \qquad \tanh(x)\coth(x) = 1 \tag{9.56}$$

$$\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \tanh(x) \qquad \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \coth(x) \tag{9.57}$$

9.2.3 Beziehungen zweier Funktionen des selben Winkels

	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\tanh(x)$	$\coth(x)$
$\sinh(x)$	-	$\sqrt{\cosh^2(x) - 1}$	$\frac{\tanh(x)}{\sqrt{1-\tanh^2(x)}}$	$\frac{1}{\sqrt{\coth^2(x)-1}}$
$\cosh(x)$	$\sqrt{\sinh^2(x) + 1}$	-	$\frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2(x)}}$	$\frac{\coth(x)}{\sqrt{\coth^2(x)-1}}$
$\tanh(x)$	$\frac{\sinh(x)}{\sqrt{\sinh^2(x)+1}}$	$\frac{\sqrt{\cosh^2(x)-1}}{\cosh(x)}$	-	$\frac{1}{\coth(x)}$
$\coth(x)$	$\frac{\sqrt{\sinh^2(x)+1}}{\sinh(x)}$	$\frac{\cosh(x)}{\sqrt{\cosh^2(x)-1}}$	$\frac{1}{\tanh(x)}$	-

$$\sinh(-x) = -\sinh(x) \qquad \cosh(-x) = \cosh(x) \tag{9.58}$$

$$\tanh(-x) = -\tanh(x) \qquad \coth(-x) = -\coth(x) \tag{9.59}$$

9.2.4 Additionstheoreme

$$\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cosh(y) \pm \cosh(x)\sinh(y) \tag{9.60}$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y) \tag{9.61}$$

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh(x) \pm \tanh(y)}{1 \pm \tanh(x)\tanh(y)} \tag{9.62}$$

$$\coth(x \pm y) = \frac{1 \pm \coth(x)\coth(y)}{\coth(x) \pm \coth(y)} \tag{9.63}$$

9.2.5 Funktionen des doppelten Arguments

$$\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x) \qquad \tanh(2x) = \frac{2\tanh(x)}{1+\tanh^2(x)} \tag{9.64}$$

$$\cosh(2x) = \sinh^2(x) + \cosh^2(x) \qquad \coth(2x) = \frac{1+\coth(x)}{2\coth(x)} \tag{9.65}$$

Formel von Moivre:

$$[\cosh(x) \pm \sinh(x)]^n = \cosh(nx) \pm \sinh(nx) \tag{9.66}$$

9.2.6 Funktionen des halben Arguments

$$\sinh\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(\cosh(x)-1)} \tag{9.67}$$

$$\cosh\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh(x)+1)} \tag{9.68}$$

$$\tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh(x)-1}{\sinh(x)} = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)+1} \tag{9.69}$$

$$\coth\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)-1}\frac{\cosh(x)+1}{\sinh(x)} \tag{9.70}$$

9.2.7 Summe und Differenz

$$\sinh(x) \pm \sinh(x) = 2\sinh\left(\frac{x \pm y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x \mp y}{2}\right) \tag{9.71}$$

$$\cosh(x) + \cosh(y) = 2\cosh\left(\frac{x + y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x - y}{2}\right) \tag{9.72}$$

$$\cosh(x) - \cosh(y) = 2\sinh\left(\frac{x + y}{2}\right)\sinh\left(\frac{x - y}{2}\right) \tag{9.73}$$

$$\tanh(x) \pm \tanh(y) = \frac{\sinh(x \pm y)}{\cosh(x)\cosh(y)} \tag{9.74}$$

9.2.8 Zusammenhang mit den trigonometischen Funktionen

z sei eine komplexe Zahl

$$\sin(z) = -i\sinh(iz) \qquad \sinh(z) = -i\sin(iz) \tag{9.75}$$

$$\cos(z) = \cosh(iz) \qquad \cosh(z) = \cos(iz) \tag{9.76}$$

$$\tan(z) = -i\tanh(iz) \qquad \tanh(z) = -i\tan(iz) \tag{9.77}$$

$$\cot(z) = i\coth(iz) \qquad \coth(z) = i\cot(iz) \tag{9.78}$$

Kapitel 10

Quantenfeldtheorie

(By Claus Blöchinger)

10.1 Vierervektoren

In der vorliegenden Arbeit wurden die üblichen relativistischen Einheiten verwendet:

$$\hbar = c = 1 \tag{10.1}$$

Für die contra- und covarianten relativistischen Vierervektoren p gilt:

$$\begin{aligned} p^\mu &= \left(p^0, p^1, p^2, p^3\right) = \left(p^0, \vec{p}\right) \\ p_\mu &= \left(p_0, p_1, p_2, p_3\right) = \left(p_0, -\vec{p}\right) \end{aligned} \tag{10.2}$$

Für das Viererskalarprodukt gilt

$$(ab) = a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = a^0 b^0 - \vec{a}\vec{b} \tag{10.3}$$

Der relativistische metrische Tensor lautet:

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (g^{\mu\nu}) \tag{10.4}$$

Per Definition ist:

$$(\mu\nu) := g_{\mu\nu} \tag{10.5}$$

Es gilt folgende Konvention:

$$\not{p} = \gamma_\mu p^\mu = \gamma^\mu p_\mu \tag{10.6}$$

Weiter gilt:

$$g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} = \delta^{\lambda}_{\nu} = \begin{cases} +1 & ,\lambda = \mu \\ 0 & ,\text{sonst} \end{cases} \tag{10.7}$$

$$g^{\nu\mu} g_{\nu\mu} = 4 \tag{10.8}$$

10.2 Pauli-Matrizen

Die Pauli-Matrizen sind definiert als:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{10.9}$$

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{10.10}$$

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{10.11}$$

Einzelne Elemente aus den Pauli-Matrizen kann man dann wie folgt schreiben:

$$\sigma^1_{\lambda\lambda'} = 2|\lambda|\delta_{(\lambda+\lambda'),0} \tag{10.12}$$

$$\sigma^2_{\lambda\lambda'} = i\,(\lambda - \lambda')\,\delta_{(\lambda+\lambda'),0} \tag{10.13}$$

$$\sigma^3_{\lambda\lambda'} = 2\lambda\delta_{\lambda\lambda'} \tag{10.14}$$

Darin bezeichnet λ die Zeile und λ' die Spalte der Pauli-Matrizen. Wenn λ und λ' wie in unserem Fall Helizitäten darstellen, so ist das erste Element einer Zeile/Spalte mit der größten Helizität bezeichnet und das letzte Element mit der kleinsten. Man kann auch einen Vierervektor σ^μ definieren, wenn man zu den dreien Pauli-Matrizen noch folgende hinzufügt:

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{10.15}$$

$$\sigma^\mu = \left(\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3\right) = \left(\sigma^0, \vec{\sigma}\right) \tag{10.16}$$

Weiter gilt:

$$\sum_{\lambda\lambda'} \sigma^a_{\lambda\lambda'} = 0, \text{ für alle } a \tag{10.17}$$

$$\sum_{\lambda\lambda'} \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{\lambda'\lambda} = 2 \tag{10.18}$$

$$\sum_{\lambda\lambda'} \delta_{\lambda\lambda'} \sigma^a_{\lambda'\lambda} = 0, \text{für alle } a \tag{10.19}$$

$$\sum_{\lambda\lambda'} \sigma^a_{\lambda\lambda'} \sigma^b_{\lambda'\lambda} = 2\delta_{ab} \tag{10.20}$$

10.3 γ-Matrizen

Die Dirac'schen γ-Matrizen sind definiert über die Antikommutatorrelation:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \tag{10.21}$$

10.3.1 Dirac Darstellung

In der Dirac'schen Darstellung sind die γ-Matrizen wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
\gamma^0 &= \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} && (10.22)\\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} && (10.23)\\
\gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix} && (10.24)\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} && (10.25)\\
\gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} && (10.26)\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} && (10.27)\\
\gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix} && (10.28)\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} && (10.29)\\
\gamma^5 &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} && (10.30)\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} && (10.31)
\end{aligned}$$

10.3.2 Majoranadarstellung

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \tag{10.32}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{10.33}$$

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{pmatrix} \tag{10.34}$$

$$= \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \tag{10.35}$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \tag{10.36}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{10.37}$$

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & -i\sigma^1 \end{pmatrix} \tag{10.38}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \tag{10.39}$$

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \end{pmatrix} \tag{10.40}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \tag{10.41}$$

10.3.3 Chirale Darstellung

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \tag{10.42}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{10.43}$$

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} \sigma^1 & 0 \\ 0 & \sigma^1 \end{pmatrix} \tag{10.44}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{10.45}$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} \tag{10.46}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \tag{10.47}$$

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} \tag{10.48}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{10.49}$$

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \tag{10.50}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{10.51}$$

10.3.4 Transformation der Darstellungen

Allgemein gilt für die Transformation von der Dirac-Darstellung in eine andere Darstellung gilt

$$
\begin{aligned}
\gamma^\mu &= S\gamma_D^\mu S^\dagger && (10.52)\\
\psi &= S\psi_D && (10.53)
\end{aligned}
$$

wobei der Index D die Dirac-Darstellung kennzeichnet. Zur Transformation in die Chirale Darstellung ist die Matrix $S = S_C$ gegeben durch

$$
S_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \mathbb{I} \end{pmatrix} \tag{10.54}
$$

Zur Transformation in die Majorana-Darstellung verwendet man $S = S_M$

$$
S_M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & \mathbb{I} \end{pmatrix} \tag{10.55}
$$

10.3.5 Eigenschaften der γ-Matrizen

$$\begin{aligned}
\gamma^5 &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma_5 && (10.56)\\
\gamma^{0\dagger} &= \gamma^0 && (10.57)\\
\gamma^{\mu\dagger} &= \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 \\
&= g_{\mu\nu}\gamma^\nu = \gamma_\mu && (10.58)\\
\left(\gamma^0\right)^2 &= +\mathbf{I} && (10.59)\\
\left(\gamma^1\right)^2 &= \left(\gamma^2\right)^2 = \\
\left(\gamma^3\right)^2 &= -\mathbf{I} && (10.60)\\
\gamma_5^2 &= \mathbf{I} && (10.61)\\
\left\{\gamma^\mu, \gamma^5\right\} &= 0 && (10.62)\\
\left\{\not{q}, \gamma^5\right\} &= 0 && (10.63)\\
\left\{\gamma^0, \gamma^i\right\} &= 0, \qquad i = 1,2,3 && (10.64)\\
\not{q}\ \not{q} &= q^2\mathbf{I} && (10.65)\\
\not{q}\ \not{p} &= 2\,(pq) - \not{p}\ \not{q} && (10.66)\\
\not{q}^\dagger\gamma_0 &= \gamma_0\ \not{q} && (10.67)\\
\bar{\gamma}_5 &= -\gamma_5 && (10.68)\\
(1+\gamma^5)(1-\gamma^5) &= 2P_R\ \ 2P_L = 0 && (10.69)\\
P_L &= \frac{1}{2}\,(1-\gamma_5) && (10.70)\\
P_R &= \frac{1}{2}\,(1+\gamma_5) && (10.71)\\
P_{L/R}^\dagger &= P_{L/R} && (10.72)\\
P_L + P_R &= \mathbf{I} && (10.73)\\
P_L - P_R &= -\gamma_5 && (10.74)\\
P_R - P_L &= \gamma_5 && (10.75)\\
P_R^2 &= P_R && (10.76)\\
P_L^2 &= P_L && (10.77)\\
P_{L/R}\gamma^\mu &= \gamma^\mu P_{R/L} && (10.78)\\
P_{L/R}\ \not{q} &= \not{q}P_{R/L} && (10.79)\\
P_L\gamma_5 &= \gamma_5 P_L = -P_L && (10.80)\\
P_R\gamma_5 &= \gamma_5 P_R = P_R && (10.81)\\
\bar{P}_{L/R} &= P_{R/L} && (10.82)\\
& && (10.83)
\end{aligned}$$

Für die Projektionsoperatoren gilt folgende Zerlegung

$$(a + b\gamma_5) = \frac{1}{2}(a+b)(1+\gamma_5) + \frac{1}{2}(a-b)(1-\gamma_5) = (a+b)P_R + (a-b)P_L \tag{10.84}$$

$$(a - b\gamma_5) = \frac{1}{2}(a-b)(1+\gamma_5) + \frac{1}{2}(a+b)(1-\gamma_5) = (a-b)P_R + (a+b)P_L \tag{10.85}$$

10.3.6 Spuren

Alle Spuren mit ungerader Anzahl von γ-Matrizen (oder mit γ_5 und einer ungerader Anzahl von γ-Matrizen) sind identisch null. Für alle anderen Spuren mit gerader Anzahl von γ-Matrizen gelten folgende Regeln:

$$\mathrm{Tr}\,[\not{a}\,\not{b}] = 4\,(ab) \tag{10.86}$$

$$\mathrm{Tr}\,[\not{a}\,\not{b}\,\not{c}\,\not{d}] = 4\,((ab)\,(cd) - (ac)\,(bd) + (ad)\,(bc)) \tag{10.87}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\,(1) &= 4 && (10.88)\\
\mathrm{Tr}\,(\text{ungerade Zahl von } \gamma\text{'s}) &= 0 && (10.89)\\
\mathrm{Tr}\,(\gamma^\mu\gamma^\nu) &= 4g^{\mu\nu} && (10.90)\\
\mathrm{Tr}\,(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) &= 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) && (10.91)\\
\mathrm{Tr}\,(\gamma^5) &= 0 && (10.92)\\
\mathrm{Tr}\,(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5) &= 0 && (10.93)\\
\mathrm{Tr}\,(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5) &= +4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -4i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} && (10.94)\\
\mathrm{Tr}\,(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\cdots) &= \mathrm{Tr}\,(\cdots\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu\cdots) && (10.95)\\
\gamma^\mu\gamma_\mu &= 4 && (10.96)\\
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu &= -2\gamma^\nu && (10.97)\\
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu &= 4g^{\nu\rho} && (10.98)\\
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu &= -2\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\nu && (10.99)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\lambda\gamma^\chi\right] = \; & 4g^{\mu\nu}\left(g^{\rho\sigma}g^{\lambda\chi} - g^{\rho\lambda}g^{\sigma\chi} + g^{\rho\chi}g^{\sigma\lambda}\right) - \\
& - 4g^{\mu\rho}\left(g^{\nu\sigma}g^{\lambda\chi} - g^{\nu\lambda}g^{\sigma\chi} + g^{\nu\chi}g^{\sigma\lambda}\right) + \\
& + 4g^{\mu\sigma}\left(g^{\nu\rho}g^{\lambda\chi} - g^{\nu\lambda}g^{\rho\chi} + g^{\nu\chi}g^{\rho\lambda}\right) - \\
& - 4g^{\mu\lambda}\left(g^{\nu\rho}g^{\sigma\chi} - g^{\nu\sigma}g^{\rho\chi} + g^{\nu\chi}g^{\rho\sigma}\right) + \\
& + 4g^{\mu\chi}\left(g^{\nu\rho}g^{\sigma\lambda} - g^{\nu\sigma}g^{\rho\lambda} + g^{\nu\lambda}g^{\rho\sigma}\right) \qquad (10.100)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\,[\not a_1 \not a_2 \not a_3 \not a_4 \not a_5 \not a_6] &= 4\,(a_1a_2)\,((a_3a_4)\,(a_5a_6) - (a_3a_5)\,(a_4a_6) + (a_3a_6)\,(a_4a_5)) - \\
&- 4\,(a_1a_3)\,((a_2a_4)\,(a_5a_6) - (a_2a_5)\,(a_4a_6) + (a_2a_6)\,(a_4a_5)) + \\
&+ 4\,(a_1a_4)\,((a_2a_3)\,(a_5a_6) - (a_2a_5)\,(a_3a_6) + (a_2a_6)\,(a_3a_5)) - \\
&- 4\,(a_1a_5)\,((a_2a_3)\,(a_4a_6) - (a_2a_4)\,(a_3a_6) + (a_2a_6)\,(a_3a_4)) + \\
&+ 4\,(a_1a_6)\,((a_2a_3)\,(a_4a_5) - (a_2a_4)\,(a_3a_5) + (a_2a_5)\,(a_3a_4))
\end{aligned} \tag{10.101}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\,[\not a_1 \cdots \not a_n] &= (a_1a_2)\ \mathrm{Tr}\,[\not a_3 \cdots \not a_n] - (a_1a_3)\ \mathrm{Tr}\,[\not a_2 \not a_4 \cdots \not a_n] + \cdots \\
&\cdots + (a_1a_n)\ \mathrm{Tr}\,[\not a_2 \cdots \not a_{n-1}]
\end{aligned} \tag{10.102}
$$

$$\mathrm{Tr}\,[abcd] = \mathrm{Tr}\,[dabc] \tag{10.103}$$

$$\mathrm{Tr}\,[\gamma_5] = 0 \tag{10.104}$$

$$\mathrm{Tr}\,[\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu] = 0 \tag{10.105}$$

$$\mathrm{Tr}\,[\gamma_5 \not a_1 \not a_2] = 0 \tag{10.106}$$

$$\mathrm{Tr}\,[\gamma_5 \not a_1 \not a_2 \not a_3 \not a_4] = 4i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}a_1^\alpha a_2^\beta a_3^\gamma a_4^\delta =: 4i\,[a_1a_2a_3a_4] \tag{10.107}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\,[\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\lambda\gamma_\tau] &= 4i\,(g_{\mu\nu}\varepsilon_{\rho\sigma\lambda\tau} - g_{\mu\rho}\varepsilon_{\nu\sigma\lambda\tau} + g_{\nu\rho}\varepsilon_{\mu\sigma\lambda\tau} + g_{\lambda\tau}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} - g_{\sigma\tau}\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} + \\
&\quad + g_{\sigma\lambda}\varepsilon_{\mu\nu\rho\tau}) \\
&= 4i\,\{(\mu\nu)\,[\rho\sigma\lambda\tau] - (\mu\rho)\,[\nu\sigma\lambda\tau] + (\nu\rho)\,[\mu\sigma\lambda\tau] + \\
&\quad + (\lambda\tau)\,[\mu\nu\rho\sigma] - (\sigma\tau)\,[\mu\nu\rho\lambda] + (\sigma\lambda)\,[\mu\nu\rho\tau]\}
\end{aligned} \tag{10.108}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\,[\gamma_5 \not a_1 \not a_2 \not a_3 \not a_4 \not a_5 \not a_6] &= 4i\,\{(a_1a_2)\,[a_3a_4a_5a_6] - (a_1a_3)\,[a_2a_4a_5a_6] + \\
&+ (a_2a_3)\,[a_1a_4a_5a_6] + (a_5a_6)\,[a_1a_2a_3a_4] - \\
&- (a_4a_6)\,[a_1a_2a_3a_5] + (a_4a_5)\,[a_1a_2a_3a_6]\}
\end{aligned} \tag{10.109}
$$

Häufig auftretende Kombinationen:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\,[\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\nu] \\
&\quad = 4(g^{\rho\mu}g^{\sigma\nu} - g^{\rho\sigma}g^{\mu\nu} + g^{\rho\nu}g^{\mu\sigma})
\end{aligned} \tag{10.110}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\,\left[\gamma^\mu(1-\gamma^5) \not p_1\gamma^\nu(1-\gamma^5) \not p_2\right] \\
&\quad = 2\ \mathrm{Tr}\,[\gamma^\mu \not p_1\gamma^\nu \not p_2] + 8i\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta}p_{1\alpha}p_{2\beta}
\end{aligned} \tag{10.111}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\,[\gamma^\mu \not p_1\gamma^\nu \not p_2]\ \mathrm{Tr}\,[\gamma_\mu \not p_3\gamma_\nu \not p_4] \\
&\quad = 32\,[(p_1p_3)(p_2p_4) + (p_1p_4)(p_2p_3)]
\end{aligned} \tag{10.112}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\,\left[\gamma^\mu \not p_1\gamma^\nu\gamma^5 \not p_2\right]\ \mathrm{Tr}\,[\gamma_\mu \not p_3\gamma_\nu\gamma_5 \not p_4] \\
&\quad = 32\,[(p_1p_3)(p_2p_4) - (p_1p_4)(p_2p_3)]
\end{aligned} \tag{10.113}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left[p_+^\mu p_-^\nu - (p_+p_-)g_{\mu\nu} + p_+^\mu p_-^\nu\right] \\
&\times \left[k_{+\mu}k_{-\nu} - (k_+k_-)g^{\mu\nu} + k_{+\mu}k_{-\nu}\right] \\
&\quad = 2(p_+k_+)(p_-k_-) + 2(p_+k_-)(p_-k_+) && (10.114) \\
&\varepsilon^{\rho\mu\sigma\nu}\varepsilon_{\tau\mu\lambda\nu}p_{+\rho}p_{-\sigma}k^{+\tau}k^{-\lambda} \\
&\quad = -2\left[(p_+k_+)(p_-k_-) - (p_+k_-)(p_-k_+)\right] && (10.115) \\
&\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu(1-\gamma^5)\not{p}_1\gamma^\nu(1-\gamma^5)\not{p}_2\right] \\
&\times \mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu(1-\gamma_5)\not{p}_3\gamma_\nu(1-\gamma_5)\not{p}_2\right] && (10.116) \\
&\quad = 256(p_1p_3)(p_2p_4) && (10.117)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu &= g^{\mu\alpha}\gamma^\nu + g^{\nu\alpha}\gamma^\mu - g^{\mu\nu}\gamma^\alpha - i\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta}\gamma_5\gamma_\beta && (10.118) \\
\varepsilon_{ijkl}a^ib^jc^kd^l &= a^ib^j(c^k\times d^l) - b^jc^k(d^l\times a^i) \\
&\quad + c^kd^l(a^i\times b^j) - d^la^i(b^j\times c^k) && (10.119)
\end{aligned}
$$

10.4 4-Dimensionaler ε-Tensor

Folgende Definition für den total antisymmetrisschen Tensor ϵ wird in der vorliegenden Arbeit verwendet:

$$
\epsilon_{\mu\nu\sigma\tau} = \begin{cases} +1 & \text{, wenn } (\mu\nu\sigma\tau) \text{ eine gerade Permutation von (0123) ist} \\ -1 & \text{, wenn } (\mu\nu\sigma\tau) \text{ eine ungerade Permutation von (0123) ist} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \tag{10.120}
$$

Diese Definition hält sich an die Konvention in [BjorkenDrell]. Es muss in diesem Zusammenhang darauf hingewiesen werden, daß diese Konventionen in anderen Artikeln und Büchern nicht unbedingt genauso definiert sind (z.B. [Itzykson]). Weiter wird definiert:

$$
[\mu\nu\sigma\tau] := \epsilon_{\mu\nu\sigma\tau} \tag{10.121}
$$

$$
[abcd] := \epsilon_{\mu\nu\sigma\tau}a^\mu b^\nu c^\sigma d^\tau \tag{10.122}
$$

Der total antisymmetrische Tensor dritter Stufe lautet:

$$
\epsilon^{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{, wenn } (ijk) \text{ eine gerade Permutation von (123) ist} \\ -1 & \text{, wenn } (ijk) \text{ eine ungerade Permutation von (123) ist} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}
$$

$$(10.123)$$

Gauß'scher Entwicklungssatz:

$$\left[\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right] = \epsilon^{ijk}a_j\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)_k = \epsilon^{ijk}\epsilon^{klm}a_jb_lc_m \tag{10.124}$$

$$\epsilon^{ijk} = -\epsilon^{ikj} \tag{10.125}$$

$$\epsilon^{kij}\epsilon^{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \tag{10.126}$$

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\epsilon^{\beta\alpha\gamma\delta} \tag{10.127}$$

$$[abcd] = a^\mu\,[\mu bcd] = -\,[acbd] = \cdots \tag{10.128}$$

$$[\mu\nu\rho\sigma]\,[\mu\alpha\beta\gamma] = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} \tag{10.129}$$

$$g^{\nu\mu}\epsilon_{\alpha\beta\nu\mu} = 0 \tag{10.130}$$

$$g_{\mu\omega}\epsilon^{\mu}{}_{\nu\sigma\tau} = \epsilon_{\omega\nu\sigma\tau} \tag{10.131}$$

$$\begin{aligned} i\gamma^5\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \;=\;& \gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\gamma\gamma_\delta - g_{\alpha\beta}\gamma_\gamma\gamma_\delta - g_{\gamma\delta}\gamma_\alpha\gamma_\beta - g_{\alpha\delta}\gamma_\beta\gamma_\gamma - g_{\beta\gamma}\gamma_\alpha\gamma_\delta + g_{\alpha\gamma}\gamma_\beta\gamma_\delta + \\ &+ g_{\beta\delta}\gamma_\alpha\gamma_\gamma + g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta} - g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} + g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} \end{aligned} \tag{10.132}$$

$$[\alpha\beta\gamma\delta]\,(\sigma\tau) = [\sigma\beta\gamma\delta]\,(\alpha\tau) + [\alpha\sigma\gamma\delta]\,(\beta\tau) + [\alpha\beta\sigma\delta]\,(\gamma\tau) + [\alpha\beta\gamma\sigma]\,(\delta\tau) \tag{10.133}$$

$$-\epsilon^{\alpha\lambda\mu\nu}\epsilon_{\alpha\rho\sigma\tau} = \delta^\lambda_\rho\left(\delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\tau - \delta^\mu_\tau\delta^\nu_\sigma\right) - \delta^\lambda_\sigma\left(\delta^\mu_\rho\delta^\nu_\tau - \delta^\mu_\tau\delta^\nu_\rho\right) + \delta^\lambda_\tau\left(\delta^\mu_\rho\delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\rho\right) \tag{10.134}$$

$$-\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\epsilon_{\alpha\beta\sigma\tau} = 2\left(\delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\tau - \delta^\mu_\tau\delta^\nu_\sigma\right) \tag{10.135}$$

$$-\epsilon^{\alpha\beta\gamma\nu}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\tau} = 6\delta^\nu_\tau \tag{10.136}$$

$$-\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = 24 \tag{10.137}$$

10.5 Spinoren

Spinoren sind Lösungen der Dirac-Gleichung:

$$(\not{p} - m)\,u\,(p) \;=\; 0 \tag{10.138}$$

$$\bar{u}\,(p)\,(\not{p} - m) \;=\; 0 \tag{10.139}$$

Es gibt für Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen zwei Lösungen mit positiver und zwei Lösungen mit negativer Energie [Nachtmann]:

$$u\,(p,s) \;=\; \sqrt{p^0+m}\begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{p^0+m}\chi_s \end{pmatrix} \tag{10.140}$$

$$v\,(p,s) \;=\; -\sqrt{p^0+m}\begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{p^0+m}\epsilon\chi_s \\ \epsilon\chi_s \end{pmatrix} \tag{10.141}$$

Darin ist s ein Spinindex ($s = \pm\frac{1}{2}$) und ϵ ist eine Matrix der Form:

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{10.142}$$

die Zweierspinoren χ_s sind definiert als:

$$\chi_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10.143}$$

$$\chi_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{10.144}$$

Alternativ gibt es auch eine Darstellung der Spinoren mit Helizitäten anstelle von Spinwerten [Haber]:

$$u(p,\lambda) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \cosh\frac{\zeta}{2}\chi_\lambda(\hat{p}) \\ 2\lambda\sinh\frac{\zeta}{2}\chi_\lambda(\hat{p}) \end{pmatrix} \tag{10.145}$$

$$v(p,\lambda) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \sinh\frac{\zeta}{2}\chi_{-\lambda}(\hat{p}) \\ -2\lambda\cosh\frac{\zeta}{2}\chi_{-\lambda}(\hat{p}) \end{pmatrix} \tag{10.146}$$

Darin ist ζ die Rapidität, für die gilt:

$$E = m\cosh\zeta \tag{10.147}$$

$$|\vec{p}| = m\sinh\zeta \tag{10.148}$$

$$\cosh\frac{\zeta}{2} = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \tag{10.149}$$

$$\sinh\frac{\zeta}{2} = \sqrt{\frac{E-m}{2m}} \tag{10.150}$$

χ_λ ist die Lösung der Eigenwertgleichung

$$\frac{1}{2}\vec{\sigma}\hat{\vec{p}}\chi_\lambda = \lambda\chi_\lambda \tag{10.151}$$

mit $\lambda = \pm\frac{1}{2}$. Ist $\hat{\vec{p}}$ ein Einheitsvektor mit Polarwinkel θ und Azimutalwinkel ϕ, so kann man explizit schreiben:

$$\chi_{\frac{1}{2}}\left(\hat{\vec{p}}\right) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{10.152}$$

$$\chi_{-\frac{1}{2}}\left(\hat{\vec{p}}\right) = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{10.153}$$

Es gelten folgende weitere Definitionen:

$$\bar{u} = u^\dagger\gamma_0 \tag{10.154}$$

$$\bar{M} = \gamma_0 M^\dagger \gamma_0 \quad \text{für eine Matrix } M \tag{10.155}$$

$$\bar{u} P_{L/R} = \overline{P_{R/L} u} \tag{10.156}$$

Für den Ladungskonjugationsoperator gilt:

$$C^\dagger = -C \tag{10.157}$$

$$C^{-1} = -C \tag{10.158}$$

$$C^2 = -1 \tag{10.159}$$

$$C^T = -C \tag{10.160}$$

$$v(p,\lambda) = C\bar{u}^T(p,\lambda) \tag{10.161}$$

$$\bar{u}^T(p,\lambda) = C^{-1} v(p,\lambda) = -Cv(p,\lambda) \tag{10.162}$$

$$\bar{u}(p,\lambda) = v^T(p,\lambda)\left(C^{-1}\right)^T = v^T(p,\lambda)\, C \tag{10.163}$$

$$u(p,\lambda) = C\bar{v}^T(p,\lambda) \tag{10.164}$$

$$\bar{v}^T(p,\lambda) = C^{-1} u(p,\lambda) = -Cu(p,\lambda) \tag{10.165}$$

$$\bar{v}(p,\lambda) = u^T(p,\lambda)\left(C^{-1}\right)^T = u^T(p,\lambda)\, C \tag{10.166}$$

$$C^{-1}\gamma^\mu C = -\gamma^{\mu T} \tag{10.167}$$

$$C\gamma^{\mu T} c^{-1} = -\gamma^\mu \tag{10.168}$$

$$C\gamma^5 C^{-1} = \gamma^{5T} \tag{10.169}$$

$$C^{-1}\left(\gamma^\mu\gamma^5\right) C = \left(\gamma^\mu\gamma^5\right)^T \tag{10.170}$$

$$C\left(\gamma^\mu\gamma^5\right)^T C^{-1} = \left(\gamma^\mu\gamma^5\right) \tag{10.171}$$

$$C^T P_{L/R}^T C^{-1} = -P_{L/R} \tag{10.172}$$

10.6 Weitere wichtige Formeln

Hier nun einige Darstellungen der δ-Funktion:

$$\delta(x) = (2\pi)^{-4} \int d^4 k e^{ikx} \tag{10.173}$$

$$\delta(x) = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\sin \alpha x}{\pi x} \tag{10.174}$$

$$\delta(x) = \lim_{\beta\to\infty} \frac{1-\cos \beta x}{\pi \beta x^2} \tag{10.175}$$

Es gilt folgende Beziehung:

$$\int dx\; g(x)\, \delta^1(f(x)) = \left.\frac{g(x)}{|f'(x)|}\right|_{f(x)=0} \tag{10.176}$$

Die θ-Funktion hat folgende Struktur:

$$\theta(x-x_0) = \begin{cases} x - x_0, & \text{für } x - x_0 > 0 \\ x_0 - x, & \text{für } x - x_0 < 0 \end{cases} \tag{10.177}$$

Für die Mandelstamvariablen gilt:

$$s + t + u = \sum_i m_i^2 \tag{10.178}$$

Einige Formeln für SUSY-Parameter:

$$\tan\beta = \cot\theta_V \tag{10.179}$$

$$\cos 2\theta_V = -\cos 2\beta \tag{10.180}$$

$$\sin 2\theta_V = \sin 2\beta \tag{10.181}$$

$$\cos\theta_V = \sin\beta \tag{10.182}$$

$$\sin\theta_V = \cos\beta \tag{10.183}$$

$$\begin{aligned} w(x,y,z) &= \sqrt{\lambda(x,y,z)} \\ &= \sqrt{x - \left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2}\sqrt{x - \left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2} \\ &= \sqrt{x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz} \end{aligned} \tag{10.184}$$

Bargmann-Wigner Spinoperator:

$$W^\mu(p) = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} M^{\nu\rho} p^\sigma \tag{10.185}$$

(M sind die Erzeugenden der homogenen Lorentzgruppe)

Bouchiat-Michel-Formel:

$$u(p,\lambda')\,\bar{u}(p,\lambda) = \frac{1}{2}\left(\delta_{\lambda\lambda'} + \gamma_5\ \not{s}^a\sigma^a_{\lambda\lambda'}\right)(\not{p}+m) \tag{10.186}$$

$$v(p,\lambda')\,\bar{v}(p,\lambda) = \frac{1}{2}\left(\delta_{\lambda'\lambda} + \gamma_5\ \not{s}^a\sigma^a_{\lambda'\lambda}\right)(\not{p}-m)\ , \tag{10.187}$$

Deren Hochenergienäherung (VORSICHT: $s^3 \propto \frac{1}{m}$):

$$u(p,\lambda'_{e^-})\,\bar{u}(p,\lambda_{e^-}) = \frac{1}{2}\left(1+2\lambda_{e^-}\gamma_5\right)\not{p}\delta_{\lambda_{e^-}\lambda'_{e^-}} + \frac{1}{2}\gamma_5\left(\not{t}^1\sigma^1_{\lambda_{e^-}\lambda'_{e^-}} + \not{t}^2\sigma^2_{\lambda_{e^-}\lambda'_{e^-}}\right)\not{p} \tag{10.188}$$

$$v(p,\lambda'_{e^-})\,\bar{v}(p,\lambda_{e^-}) = \frac{1}{2}\left(1-2\lambda_{e^-}\gamma_5\right)\not{p}\delta_{\lambda'_{e^-}\lambda_{e^-}} + \frac{1}{2}\gamma_5\left(\not{t}^1\sigma^1_{\lambda'_{e^-}\lambda_{e^-}} + \not{t}^2\sigma^2_{\lambda'_{e^-}\lambda_{e^-}}\right)\not{p} \tag{10.189}$$

Für die s^a gilt:

$$(ps^a)(s^ak) \longrightarrow \sum_a s^a_\mu s^a_\nu = -g_{\mu\nu} + \frac{k'_\mu k'_\nu}{m^2_{\tilde{\chi}^0_2}} \tag{10.190}$$

Spinsummation:

$$\sum_{\lambda\lambda'} u(p,\lambda')\,\bar{u}(p,\lambda) = (\not{p}+m) \tag{10.191}$$

$$\sum_{\lambda\lambda'} v(p,\lambda')\,\bar{v}(p,\lambda) = (\not{p}-m) \tag{10.192}$$

Sphärische Trigonometrie:

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma} \tag{10.193}$$

$$\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos\gamma \tag{10.194}$$

S-Matrix:

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4\delta^{(4)}(P_f - P_i)T_{fi} \tag{10.195}$$

$$\mathbf{S} = T\left[\exp\left(+i\int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int d^3x : \mathfrak{L}(\vec{x},t') :\right)\right] \tag{10.196}$$

Differentieller Wirkungsquerschnitt:

$$d\sigma = \frac{1}{2w\left(s,m_1^2,m_2^2\right)}\prod_{i=1}^{m}\frac{d^3p'_i}{(2\pi)^3\ 2p'^0_i}(2\pi)^4\,\delta^4\left(p'_1+\cdots+p'_m-p_1-p_2\right)S|T_{fi}|^2$$

(10.197)

Differentielle Zerfallsbreite:

$$d\Gamma = \frac{1}{2k^0} \prod_{i=1}^{n} \frac{d^3 k_i'}{(2\pi)^3 \; 2k_i'^0} (2\pi)^4 \, \delta^4 \left(k_1' + \cdots + k_n' - k\right) S |T_{fi}|^2 \tag{10.198}$$

Definition von Gram-Determinanten:

$$\Delta_n \left(p_1, p_2, \ldots, p_n\right) = \begin{vmatrix} (p_1 p_1) & (p_1 p_2) & \cdots & (p_1 p_n) \\ (p_2 p_1) & (p_2 p_2) & \cdots & (p_2 p_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (p_n p_1) & (p_n p_2) & \cdots & (p_n p_n) \end{vmatrix} \tag{10.199}$$

Kinematische Funktionen: Für die kinematische Funktion $\lambda(x, y, z)$ gilt

$$\begin{aligned} \lambda(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz \left(= w^2 (x, y, z)\right) \\ &= \left(x - \left(\sqrt{y} + \sqrt{z}\right)^2\right) \left(x - \left(\sqrt{y} - \sqrt{z}\right)^2\right) \end{aligned} \tag{10.200}$$

Sie ist invariant unter Vertauschungen der Variablen x, yund$z$. Für die kinematische Funktion $G(x, y, z, u, v, w)$ gilt

$$\begin{aligned} G(x, y, z, u, v, w) &= x^2 y + x y^2 + z^2 u + z u^2 + v^2 w + v w^2 + x z v + x u v + y z w + \\ &\quad + y u w - x y (z + u + v + w) - z u (x + y + v + w) - \\ &\quad - v w (x + y + z + u) \end{aligned} \tag{10.201}$$

Diese kinematische Funktion ist invariant unter Vertauschungen der Variablenpaare $(xy), (zu)$ und (vw) sowie unter simultanen Vertauschungen der Variablen innerhalb zweier dieser Variablenpaare.

Inhaltsverzeichnis